CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES INGENIEURS DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE MARITIME AU TITRE DE L'ANNEE 2018

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Durée : 2 heures)

Le candidat traitera 3 questions au choix parmi les 4 proposées, chaque question représentant le même nombre de points.

1ère question

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

1.1. Dresser le tableau de variations (limites comprises) de la fonction u sur l'intervalle I.

1.2. Justifier l'existence d'un unique réel de l'intervalle I tel que $u(\alpha) = 0$.

On admettra par la suite que $\alpha \approx 1{,}31$.

1.3. En déduire le tableau de signes de $u(x)$.

1.4. Montrer que $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

2. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = x^2 + \left(2 - \ln(x)\right)^2$.

2.1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{2u(x)}{x}$.

2.2. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

2.3. Montrer que $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$.

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
- A le point de coordonnées $(0;2)$.
- M un point de d'abscisse x de Γ.

3.1. Démontrer que $AM = \sqrt{f(x)}$

3.2. En déduire les coordonnées du point M_0 pour lequel la distance AM est minimale.

3.3. Montrer que $AM_0 = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

3.4. Démontrer que la droite (AM_0) est alors perpendiculaire à la tangente à Γ en M.

$2^{ème}$ question

1. Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+1}$.

1.1. Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition.

1.2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ et montrer qu'elle admet une unique solution α dont on donnera la valeur exacte et un arrondi à 10^{-2} près.

1.3. Démontrer que pour tout $x\in[0;\alpha]$, $f(x)\in[0;\alpha]$

2. Etude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

2.1. Calculer u_1 .

2.2. Sur le graphique donné en annexe en dernière page du sujet, on a tracé la courbe représentative de f ainsi que la droite d'équation $y=x$.

Construire graphiquement sur l'axe des abscisses les points P_0 , P_1 , P_2 et P_3 d'abscisses respectives u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

2.3. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de (u_n) ?

2.4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0\leq u_n<u_{n+1}<\alpha$.

2.5. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2.6. Ecrire en langage naturel un algorithme qui demande la valeur de ε et affiche en sortie le premier entier n tel que $|u_n-\alpha|<\varepsilon$

3. Généralisation :

A donne désormais à u_0 une valeur positive quelconque.

Emettre une conjecture sur le sens de variation et la limite de la suite (u_n) en fonction des valeurs de u_0 .

3ème question

On munit le plan complexe d'un repère orthogonal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On notera A le point d'affixe $a = 3i$, B le point d'affixe $b = 2i$ et C le point d'affixe $c = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On considère l'application f qui, à tout point M du plan d'affixe z différent de B, associe le point M' du plan d'affixe $z' = \dfrac{3iz}{z-2i}$.

1. Déterminer les affixes des points A' et C', images respectives des points A et C par f. On donnera ces affixes sous forme algébrique.

2. Déterminer, s'il existe, le point D dont l'image par l'application f est le point d'affixe i.

3. Déterminer les affixes des points invariants par f, c'est-à-dire les points du plan vérifiant $z_{M'} = z_M$.

4. Montrer que, pour tout point M du plan, distinct de B, l'affixe z' de M' vérifie l'égalité :

$$z'-3i = \frac{-6}{z-2i} \qquad (*)$$

5. En déduire que si M appartient au cercle Γ de centre B et de rayon 3, alors M' appartient à un cercle Γ' dont vous préciserez le centre et le rayon.

6. Déduire de l'égalité (*) une relation entre une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AM'}\right)$ et une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right)$.

7. Montrer que le point N d'affixe $\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\left(2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)i$ est un point de Γ puis déterminer la mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{BN}\right)$.

8. En déduire une méthode de construction du point N', image de N par l'application f.

Vous illustrerez votre explication d'une figure faisant apparaitre les points N et N', ainsi que les éléments permettant la construction de ces points.

$4^{ème}$ question

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$A(-4;0;1)$; $B(3;3;-1)$; $C(1;5;1)$ et $D(0;2;6)$.

1. Justifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C, puis calculer son aire.

3. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux réels.

3.1. Déterminer les valeurs de b et c pour que $\vec{n}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

3.2. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

3.3. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

4. Soit d la droite orthogonale à (ABC) passant par D.

4.1. Donner une représentation paramétrique de d.

4.2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de d et de (ABC).

5.

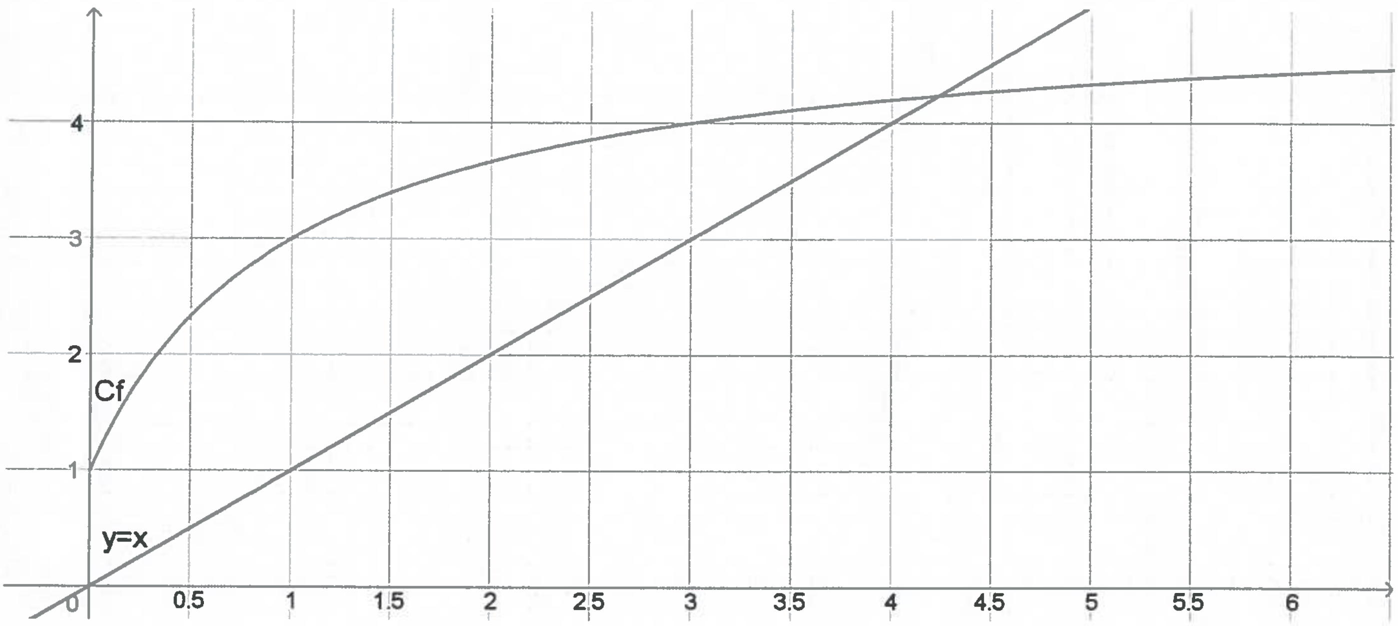
5.1. Calculer la distance DH (On donnera la valeur exacte).

5.2. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$ (On donnera la valeur exacte)

6. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ arrondie au degré près.

Annexe à rendre avec la copie

Place du candidat :	Centre de concours :



Nota :

1. Aucun document n'est autorisé.
2. Délits de fraude : "Tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude peut se voir attribuer la note zéro, éliminatoire, sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics".